

| | |
|-------------|--|
| Title | Cycle Indexes, Symmetric Functions and Exponential Formulas (1)(Combinatorial Theory and Related Topics : Mutual Relation among Commutative Algebra, Algebraic Geometry, Representation Theory of Lie Algebras and Partially Ordered Sets) |
| Author(s) | 成嶋, 弘 |
| Citation | 数理解析研究所講究録 (1988), 670: 106-128 |
| Issue Date | 1988-09 |
| URL | http://hdl.handle.net/2433/100757 |
| Right | |
| Type | Departmental Bulletin Paper |
| Textversion | publisher |

Cycle Indexes, Symmetric Functions and Exponential Formulas (1)

東海大・理 成嶋 弘 (Hiroshi Narushima)

前回 (1987年10月) の数解研集会で述べなかった、古典的
数え上げ組合せ論の中心の一つである置換群による同値類の
数え上げ論を cycle index (輪指標または巡回置換指数と
訳されている) との関連で述べ、次に対称式に関する Waring
の公式の母関数論的扱いを述べる。対称群の cycle index お
よび Waring の公式の母関数が指数公式 (exponential formula:
 $H = \exp F$) の形になっていることに注目し、指数公式の分
割に関する一般的定理を述べ、この定理から先の母関数を導
く。最後に、指数公式の接合代数 (incidence algebra) や
カテゴリーの枠組での扱い、および cycle index の一般化
とその応用にもふれる。

§1 置換群作用の数え上げの定理と Cycle Index

Cauchy - Frobenius の補題 (この補題は、歴史的経緯

が P. M. Neumann [1] によって正しく指摘されるまでは、Burnside の補題と呼ばれていた) に始まる一連の置換群作用の数え上げの定理 [2 ~ 5] を、cycle index との関連で述べる。

G を有限集合 Ω 上の置換群とする。 Ω の任意の要素 x, y に対して、 G の要素 α が存在し $\alpha(x) = y$ となる α があり、 $x \equiv y$ と定める。 Ω 上のこの同値関係 \equiv による同値類を G の軌道と呼び、 Ω の要素 x を含む軌道を O_x で表わし、 G の軌道全体、すなわち、 G による Ω 上の同値類全体を Ω/G で表わす。また、 Ω の要素 x を不変に保つ G の要素の集合 $\{\alpha \in G \mid \alpha(x) = x\}$ を G_x で表わし、逆に、 G の要素 α によって不動である Ω の要素の集合 $\{x \in \Omega \mid \alpha(x) = x\}$ を Ω_α で表わす。このとき、 G_x と Ω_α は Ω と G の間の関係 $\alpha(x) = x$ によって誘導される対応対であること、および G_x は G の部分群で $|G_x| \cdot |O_x| = |G|$ が成立することより、次の公式を得る。

Cauchy-Frobenius の補題 $\alpha \in G$ を互いに素な巡回置換の積で表わしたときの長さ i の巡回置換 (α のグラフの長さ i の輪) の個数を $c_i(\alpha)$ で表わすとき、

$$(1) \quad |\Omega/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{\alpha \in G} |\Omega_\alpha| = \frac{1}{|G|} \sum_{\alpha \in G} c_1(\alpha)$$

が成立する。

次に、有限集合 A から有限集合 B への写像の全体 $\mathcal{F}(A, B)$ を考える。 A, B 上の置換群をそれぞれ $G(A), G(B)$ で表す。 $\mathcal{F}(A, B)$ の要素 f, g に対して、直積群 $G(A) \times G(B)$ の要素 (α, β) が存在し、 $\beta(f(a)) = g(\alpha(a))$ ($\forall a \in A$) となるとき、 f と g は ($G(A) \times G(B)$ に関して) 同値パターンまたは 図式 (schemata) であるという。ここで、 $G(A) \times G(B)$ によって誘導される $\mathcal{F}(A, B)$ 上の置換群は $G(A) \times G(B)$ と同一視できるので、同値関係 \sim による同値類 (軌道) の集合 $\mathcal{F}(A, B) / G(A) \times G(B)$ を考える。はじめに、 $G(A) \times G(B)$ の要素 (α, β) のもとで不動である写像 $f \in \mathcal{F}(A, B)$ の集合 $\mathcal{F}(A, B)_{(\alpha, \beta)}$ に対して、次式を得る。

$$(2) \quad |\mathcal{F}(A, B)_{(\alpha, \beta)}| = \prod_{1 \leq i \leq l} \left(\sum_{j \geq 1} j d_j \right)^{c_i}$$

ただし、 c_i, d_i はそれぞれ α, β の長さ i の輪の個数である。式 (1) と (2) より、次の公式を得る。

$$(3) \quad |\mathcal{F}(A, B) / G(A) \times G(B)| = \frac{1}{|G(A) \times G(B)|} \sum_{(\alpha, \beta)} \prod_{1 \leq i \leq l} \left(\sum_{j \geq 1} j d_j \right)^{c_i}$$

この公式は、化学構造、グラフ、およびオートマトンなど有限写像系の“同型”でないものの数え上げに本質的な役割を

果すものである。

置換群 G の cycle index (Redfield [3] は group reduction function と名付けた) $Cyc(G)$ とは、次式によって定めらる "多変数" 多項式のことである。

$$(4) \quad Cyc(G) = \frac{1}{|G|} \sum_{\alpha \in G} x_1^{c_1} x_2^{c_2} \cdots x_n^{c_n}$$

ただし、 c_i は α の長さ i の輪の個数であり、 n は十分大きくとるものとする。

先に述べた $\mathcal{F}(A, B)$ 上の図式関係 \sim で、特に、 B 上の置換群 $G(B)$ が単位元 e のみの場合を考える。ここで、 $G(A) \times \{e\}$ を $G(A)$ と同一視する。 B の各要素 b に対して、ある 重み (weight) $w(b)$ (b の適当な表示式でその全体は環をなすもの) を対応させ、 $f \in \mathcal{F}(A, B)$ の重み $W(f)$ を $\prod_{a \in A} w(f(a))$ によって定める。このとき、 $\mathcal{F}(A, B)/G(A)$ の f を含む図式 (軌道) $[f]$ の重み $W([f])$ を $W(f)$ で定めることができる ($f, g \in [f]$ ならば $W(f) = W(g)$ に注意せよ)、次の公式が成立する。

Pólya-Redfield の定理

$$(4) \quad \sum_{[f] \in \mathcal{F}(A, B)/G(A)} W([f]) = Cyc(G(A)) \left(x_i \rightarrow \sum_{b \in B} (w(b))^i \right)$$

ただし、 $x_i \rightarrow \sum_{b \in B} (w(b))^i$ は x_i に $\sum_{b \in B} (w(b))^i$ を代入することを示す。

特に、 $w(b) = 1$ ($\forall b \in B$) とする、次の公式を得る。

$$(5) \quad |\mathcal{F}(A, B)/G(A)| = \text{Cyc}(G(A))(x_i \rightarrow |B|)$$

これは公式(3)において、 $G(B) = \{e\}$ と置くとき、 $d_1 = |B|$ 、 $d_i = 0$ ($i \neq 1$) であることに注意すれば、公式(5)の右辺は公式(3)の右辺そのものである。

de Bruijn の定理 公式(3)を cycle index を用いて表示すると、次の公式を得る。

$$(6) \quad |\mathcal{F}(A, B)/G(A) \times G(B)| \\ = \text{Cyc}(G(A))(x_i \rightarrow \frac{\partial}{\partial z_i}) \times \text{Cyc}(G(A))^{B}(x_i \rightarrow e^{z_i}) \Big|_{z_i=0}$$

ただし、 $z_i = i(\sum_{j \geq 1} z_{ij} x_j)$ である。

上記の諸公式は置換群のほんのわずかな性質を用いるだけで、初等的考察により証明することができ [6~8]。Rota-Smith [9] では、置換群の部分群のなす束と (その置換群の) 台集合の分割束の間のがらゝ対応の枠組のなかで、2重のメージウス反転を用いて証明されている。また、Rota-Sagan [10]

では、Pólya [2] 以来、名前のかつけ等による同値類の数
 之上げに必要な情報はすべて置換群の cycle index によっ
 て与えられると信じられてきたが、"Witt's enumeration
 of the dimensions of free Lie algebras [11]" や "Rota's
 generalization of Spitzer's probabilistic formula [12]"
 にはより詳細な不変量が必要であったこと、問題は群作用の
 "aperiodic" な要素の数之上げにあり、これは cycle index
 の範囲をこえていることを指摘し、[12] で導入し [9] で展開
 した "periods" からなる束上のモービウス反転が台集合上
 の "aperiodic" な写像の個数に対する明示的 (explicit)
 な式を与えていることを示している。

§2 対称群の cycle index の母関数とその応用

対称群の cycle index の母関数を与え、その母関数をもと
 にして、符号数 (スターリング数、すなわち k 列数 (かく k 列
 数)、対合 (involution) 数、ベル数などの母関数を導
 き、鎖多項式との関連にもふれる。ここで、重要なことは、
 cycle index の母関数が指数公式 ($H = \exp F$, $H, F \in \mathbb{C}[[x]]$)
 の形をしていることである。

n 次の対称群 S_n の cycle index は、 $c_i(\alpha)$ ($\alpha \in S_n$)
 で α の長さ i の輪の個数を表わすとき、次の通りである。

$$(7) \quad cyc(\mathfrak{S}_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_n} x_1^{c_1(\alpha)} x_2^{c_2(\alpha)} \cdots x_n^{c_n(\alpha)}$$

\mathfrak{S}_n の台集合のある要素 i_0 を含む ($\alpha \in \mathfrak{S}_n$ の) 輪に注目し、そのふるまいを考察すれば、次の漸化式を得る。

$$(8) \quad n \, cyc(\mathfrak{S}_n) = \sum_{i=1}^n x_i \, cyc(\mathfrak{S}_{n-i}) \quad (cyc(\mathfrak{S}_0) = 1 \text{ とおく})$$

次に、 $cyc(\mathfrak{S}_n)$ の母関数

$$\mathfrak{G}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} cyc(\mathfrak{S}_n) z^n$$

を考える。両辺を z で微分し、漸化式 (8) を用いると次式を得る。

対称群の cycle index の母関数

$$(9) \quad \mathfrak{G}(z) = \exp\left(x_1 z + x_2 \frac{z^2}{2} + \cdots\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \frac{z^i}{i}\right)$$

(指数公式の形に注意せよ。)

ここで、公式 (9) から、いくつかの有名な組合せ数に関する公式を導く。 $c(n, k)$ で \mathfrak{S}_n の要素でちょうど k 個の輪をもつものの個数 (これは符号なしスターリング数とも呼ばれ、第 1 種のスターリング数を $s(n, k)$ で表わすとき、 $|s(n, k)|$

に等(11)を表わす。 $C(0,0)=1$, $C(n,0)=0$ ($n \neq 0$)とする。

$$\sum_{k=0}^n C(n,k) x^k = n! (y_C(\mathfrak{S}_n)(x_i \rightarrow x))$$

に注意すべし。公式(9)より、次の母関数を得る。

$$\begin{aligned} (10) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\sum_{k=0}^n C(n,k) x^k \right) / n! \right) z^n &= \exp(x(-\log(1-z))) \\ &= (1-z)^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x+n-1}{n} z^n \end{aligned}$$

したがって、次式を得る。

$$(11) \quad \sum_{k=0}^n C(n,k) x^k = x(x+1) \cdots (x+n-1)$$

次に、 \mathfrak{S}_n の要素で長さ1の輪のないものの個数(すなわち がい列数 とか かくし列数 と呼ばれる)を $D(n)$ で表わす。

$$D(n) = n! (y_C(\mathfrak{S}_n)(x_i \rightarrow 0, x_i \rightarrow 1 (i \neq 1)))$$

に注意すべし。公式(9)より、次の母関数を得る。

$$\begin{aligned} (12) \quad \sum_{n=0}^{\infty} D(n) \frac{z^n}{n!} &= \exp(-z + z + \frac{z^2}{2} + \cdots) \\ &= \exp(-z) \exp(-\log(1-z)) \\ &= \frac{1}{1-z} e^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) z^n \end{aligned}$$

(したがって、次式を得る。

$$(13) \quad D(n) = n! \cdot (e^{-1})_{n+1}$$

ただし、 $(e^{-1})_{n+1}$ は e^{-1} のマクローリン展開の第 $n+1$ 項までの和を表わす。

\mathfrak{S}_n の 対合 (involution: $\alpha^2 = \text{単位元}$) の総数を t_n で表わすと、

$$t_n = n! \operatorname{Cyc}(\mathfrak{S}_n)(x_1 \rightarrow 1, x_2 \rightarrow 1, x_i \rightarrow 0 \ (i \neq 1, 2))$$

であるから、公式 (9) より、次式を得る。

$$(14) \quad \sum_{n=0}^{\infty} t_n \frac{z^n}{n!} = \exp\left(z + \frac{z^2}{2}\right)$$

有本 - 中村 - 中村 [13] で与えられている古典 Weyl 群 $W(B_n)$ の既約指標の表現次数の総和 $d(W(B_n))$ の指数型関数の形から、次式を得る。これは何を意味するか!

$$(15) \quad \sum_{n=0}^{\infty} d(W(B_n)) \frac{z^n}{n!} = n! \operatorname{Cyc}(\mathfrak{S}_n)(x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow 2, x_i \rightarrow 0, (i \neq 1, 2))$$

本節の最後は、公式 (6) と (9) を用いて、集合の分割数 $B(n)$ (ベル数と呼ばれている) の指数型関数を導く。はじめに、公式 (9) を用いて、次式が得られる。

$$(16) \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cyc}(\mathfrak{S}_n) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i - 1}{i}\right)$$

次に、公式(6) (de Bruijnの定理) を考える。 $|A| = n$ 、

$|B| = N \geq n$ とする。2つの写像 $f, g: A \rightarrow B$ が同一の A の分割を誘導するのは、 B 上の置換 β に対して、 $g(a) = \beta(f(a))$ ($a \in A$) となる β が存在することに注意する。したがって、公式(6)において、 $G(A) = \{e\}$ 、 $G(B) = \mathfrak{S}_n$ とおけば、次式を得る。

$$\begin{aligned} (17) \quad B(n) &= \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^n \text{Cyc}(\mathfrak{S}_N) (x_i \rightarrow \exp(i \sum_{j=1}^N z_j x_j)) \Big|_{z_i=0} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n \text{Cyc}(\mathfrak{S}_N) (x_1 \rightarrow e^z, x_i \rightarrow 1 (i \neq 1)) \Big|_{z=0} \end{aligned}$$

ここで、公式(6)を用いて、次式を得る (より詳しくは、文献[8]の問題3.31の解答を参照せよ)。

$$(18) \sum_{n=0}^{\infty} B(n) \frac{z^n}{n!} = \exp(e^z - 1)$$

最後に、公式(13)と(14)に対する chain polynomial (鎖多項式)との関連についておく。鎖多項式の一般論や記法、および他の結果については文献[14~16]を参照してほしい。

B_n で n 個の原子からなるブール束を表わし、 $\mathcal{L}(H(B_n))$ (B_n の被覆鎖多項式線形空間) の要素 $f^{(1,1)}$ に対して、 $f^{(1,1)}(\hat{1})$ ($\hat{1}$ は B_n の最大元を表わす) を $p(H(B_n); x)$ で表わす。すなわち、 $p(H(B_n); x)$ の x^i の係数は、 B_n の $\hat{1}$ からの長さ i の被覆鎖 (covering chain or maximal chain) の個数である。このとき、容易に次式が得られる。

$$(19) \quad p(H(B_n); x) = \sum_{k=0}^n n(n-1)\cdots(n-k+1)x^k$$

こゝより、次式を得る。

$$(20) \quad p(H(B_n); -1) = (-1)^n D(n)$$

Y_n で n 次のヤング束 (数 n までの分割からなる束)、 Y_n^* で Y_n の順序双対を表わす。 $f^{(1,0)} \in \mathcal{L}(H(Y_n^*))$ (Y_n^* の極大鎖多項式空間) に対して、 $f^{(1,0)}(\hat{1})|_{x=1}$ ($\hat{1}$ は Y_n^* の最大元、すなわち Y_n の最小元) を $f(n)$ とおく。すなわち、 $f(n)$ は Y_n (Y_n) の極大鎖の総数である。Robinson-Schensted の対応によって $f(n) = t_n$ (先に述べた Θ_n の対合数) が得られ、 Θ_n の対合を考えることにより、次の漸化式を容易に得ることができ。すなわち、

$$(21) \quad \begin{cases} t_0 = t_1 = 1 \\ t_n = t_{n-1} + (n-1)t_{n-2} \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

この漸化式からも容易に公式 (14) を得ることが出来る。(しかしながら、本来の目的であった $\mathcal{L}(H(Y_n^*))$ 上の単純再帰法によって“直接的に” $f(n)$ に関する (t_n と同じ) 漸化式を導くことが今のところ出来ない。この辺のところのより詳しい内容については文献 [13, 15] を参照されることよ。

§3 対称式と Waring の公式

対称式に関する Waring の公式、すなわち、基本対称式や基本同次対称式 (完全対称式) をべき和対称式で表わす式の母関数論的扱いを Macdonald [17] に従って初等的に述べる。ここで重要なことは、これらの母関数も公式 (9) と同じように、指数公式の形をしていることである。

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \dots)$ を非増加非負整数列とする。 λ_i を part と呼び、 λ の part の総数を λ の 長さ といい、 $l(\lambda)$ で表わす。part すべての 和 を $\rho(\lambda) = \sum_i \lambda_i$ で表わす。また、 $\lambda_i = k$ となる λ_i が m_k 個ありとせ、 $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots r^{m_r} \dots)$ とかく。 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ に対して $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ と定める。さらに、

$$m_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \sum x^\alpha \quad (\alpha \text{ は } \lambda \text{ の "順列"})$$

と定める。ただし、和は $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ の 順列^{av} すべてにわたる。

たす。 e_r を r 次の基本対称式、と名づける。

$$e_r = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r} \quad (= m_{(1^r)}) \quad (e_0 = 1 \text{ とおく})$$

を表す。また、 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ に対して

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \dots$$

と定める。このとき、 e_r に対する次の母関数が容易に得られる。

$$(22) \quad E(z) = \sum_{r \geq 0} e_r z^r = \prod_{i \geq 1} (1 + x_i z)$$

次に、 r 次の完全対称式 (基本同次対称式) h_r 、と名づける。

$$h_r = \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r} \quad (= \sum_{\lambda(\lambda)=r} m_\lambda) \quad (h_0 = 1 \text{ とおく})$$

を考へる。 $h_\lambda \neq e_\lambda$ と同様に定める。 h_r の母関数は

$$(23) \quad H(z) = \sum_{r \geq 0} h_r z^r = \prod_{i \geq 1} (1 - x_i z)^{-1}$$

となる。公式 (22) と (23) より、次式を得る。

$$(24) \quad H(z) E(-z) = 1$$

さらに、これより、次の公式を得る。

$$(25) \quad \sum_{r=0}^n (-1)^r e_r h_{n-r} = \sum_{r=0}^n (-1)^r h_r e_{n-r} = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 0 & (n \geq 1) \end{cases}$$

ここで、1 次のベキ和対称式

$$s_r = \sum x_i^r \quad (= m_{(r)}) \quad (r \geq 1)$$

の母関数 $S(z) = \sum_{r \geq 1} s_r z^{r-1}$ を与える。このとき、次の関係式が得られる。(s_λ と e_λ と同様に定める)

$$(26) \quad S(z) = \frac{d}{dz} \log H(z) = \frac{H'(z)}{H(z)}$$

これより、次の漸化式を得る。

$$(27) \quad h_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i h_{n-i} \quad (n \geq 1)$$

さらに、公式(26)の両辺を積分して ($H(0) = h_0 = 1$ に注意) 目的の母関数 (の 1 つ) を得る。

$$(28) \quad H(z) = \exp(s_1 z + s_2 \frac{z^2}{2} + \dots) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} s_i \frac{z^i}{i}\right)$$

これは指数公式の形をしていること、および §2 の対称群の cycle index の母関数 (9) の右辺の x_i に s_i を代入した式になっていることに注意せよ。

公式(24)の両辺を z で微分して $H'(z)/H(z) = E'(-z)/E(-z)$ を得るから、次式を得る。

$$(29) \quad S(-z) = \frac{d}{dz} \log E(z) = \frac{E'(z)}{E(z)}$$

$E(0) = e_0 = 1$ に注意して、式(29)の両辺を積分すれば、 $E(z)$ に対する次の関数を得る。

$$(30) \quad E(z) = \exp\left(s_1 z - s_2 \frac{z^2}{2} + \dots\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} s_i \frac{z^i}{i}\right)$$

(公式(24)より $E(z) = H(-z)^{-1}$ であり、これと公式(28)より直接的に求めることもできる。)

公式(28)の右辺を展開し、次式を得る。

$$(31) \quad H(z) = \sum_{\lambda} C_{\lambda}^{-1} s_{\lambda} z^{A(\lambda)}$$

ただし、 $C_{\lambda} = \prod_{i \geq 1} i^{m_i} \cdot m_i!$ ($\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots)$) である。

同様にして、次式を得る。

$$(32) \quad E(z) = \sum_{\lambda} (-1)^{A(\lambda) - l(\lambda)} C_{\lambda}^{-1} s_{\lambda} z^{A(\lambda)}$$

式(31)と(32)より、対称式に関する "Waring の公式" を得る。

$$(33) \quad h_m = \sum_{A(\lambda)=m} C_{\lambda}^{-1} s_{\lambda}$$

$$(34) \quad e_m = \sum_{A(\lambda)=m} (-1)^{A(\lambda) - l(\lambda)} C_{\lambda}^{-1} s_{\lambda}$$

このようにして、公式(28)と(30)が対称式に関する Waring の公式の左関数と呼ばれらる "ゆえん" がわかる。

§4 Exponential Formula

§2 と §3 での中心的な関数公式 (9) や (28) など が指数公式 (exponential formula) の形. すなわち,

$$H = \exp(F), \quad H, F \in \mathbb{C}[[z]]$$

$$(\text{より正確に, } H, F \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots][[z]])$$

をしていることに注目し, はじめに, 指数公式に関する一般的结果を Stanley [18] に従い, 最も初等的な形で示す.

次に, その一般的结果から, 先に与えた対称群の cycle index の関数 (公式 (9)) および対称式に関する Waring の公式の関数 (公式 (28)) を導く. 最後は, 指数公式の接合代数 (incidence algebra) やカテゴリー論的扱いにふれる.

集合 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ の分割全体を Π_n で表す. 分割 $\pi \in \Pi_n$ の要素を ブロック と呼び, i 個の要素からなるブロックがちょうど a_i 個あるとき, π の タイプ は (a_1, a_2, \dots) であるという. π のブロックの個数を $|\pi|$ で表す. P, \mathbb{C} でそれぞれ, 正の整数, 複素数の集合を表す.

Convolutional Formula for Partition 写像

$f: P \rightarrow \mathbb{C}, g: P \rightarrow \mathbb{C}$ に対して, 新しい写像 $h: P \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$h(n) = \sum_{\pi} f(1)^{a_1} f(2)^{a_2} \dots f(n)^{a_n} g(|\pi|)$$

によって定める。ただし、和は $[n]$ のすべての分割にわたり、
 $\pi \in \Pi_n$ のタイプが (a_1, a_2, \dots) である。さらに、 $F(z)$ 、
 $G(z)$ 、 $H(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ を次のように定める。

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \frac{z^n}{n!}, \quad G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n) \frac{z^n}{n!}$$

$$H(z) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n) \frac{z^n}{n!}$$

このとき、

$$H(z) = G(F(z))$$

である。

Convolutional Formula により、 $g(n) = 1$ であるとき、
 $G(z) = e^z - 1$ となり、次の指数公式を得る。

分割に対する指数公式 写像 $f: P \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、新しい

写像 $h: P \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$h(n) = \sum_{\pi \in \Pi_n} f(1)^{a_1} f(2)^{a_2} \cdots f(n)^{a_n}$$

(a_1, a_2, \dots, a_n) は π のタイプ

によって定め、さらに、 $F(z) = \sum_{n \geq 1} f(n) z^n / n!$ 、 $H(z) = \sum_{n \geq 1} h(n) z^n / n!$
 であるとき、

$$1 + H(z) = \exp F(z)$$

である。

次に、指数公式から、先に与えた公式と導く。

(i) 指数公式において、 $f(n) = 1$ ($n \in \mathbb{P}$) とおけば、ただちに、ベル数 $B(n)$ の指数型 ϵ 関数 (公式 (18)) を得る。

(ii) 指数公式において、 $f(n) = (n-1)! x_n$ ($n \in \mathbb{P}$) とおくと、 $F(z) = \sum_{n \geq 1} x_n z^n / n$ となり、対称群の cycle index x の ϵ 関数 (公式 (9)) の右辺と指数公式の右辺が一致し、また、多少の計算により、

$$\sum_{\pi \in \Pi_n} f(1)^{a_1} \cdots f(n)^{a_n} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_n} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$$

(a_1, \dots, a_n) は π のタイプ $a_i = C_i(\alpha) = \alpha$ の長さ i の輪の個数

を示すことができ、公式 (9) を得る。

(iii) 指数公式において、 $f(n) = (n-1)! s_n$ ($n \in \mathbb{P}$) (s_n は s で定めた n 次のべき和対称式である) とおくと、

式の右辺が公式 (28) (対称式の Waring の公式の ϵ 関数) の右辺と一致し、また、多少の計算により、

$$\sum_{\pi \in \Pi_n} f(1)^{a_1} \cdots f(n)^{a_n} / n! = \sum_{\alpha(\lambda) = n} C_\lambda^{-1} s_\lambda$$

を示すことができ、公式 (33) より、指数公式の左辺が公式 (28) の左辺となり、公式 (28) を得る。

Convolutional Formula, Exponential Formula の多少一般化的な形と他の多くの応用が Stanley [18] にのっている。分割束のカテゴリ-での接合代数 (incidence algebra) でのより一般化的な定式化は Douillet-Rota-

Stanley [19] で扱われており、bijectiveなアプロ-4がより明確になっている。また、このアプロ-4での対称式に関する多くの公式が Doukilet [20] で与えられている。さらに、メービウスの反転公式を用いたよりカテゴリーカルな形式級数の組合せ論が Joyal [21] で展開され、公式 (9) を例として与えられている。Bonetti-Rota-Senato-Venezia [22] は "Joyal Theory" の流れのなかで、"symmetric species" の概念を導入し、対称式に関する Waring の公式 (の関数) の bijective proof をメービウス反転を用いる"と述べている。また、Nava-Rota [23] では、Joyal Theory of Species の "a partition-theoretic analog" が展開されており、これは非常に興味深い論文である。

— 3 — 置換群の cycle index は次のように一般化されている。H を S_n の部分群、 χ を H の指標とする $\chi \in \chi(H)$ 、 χ に関する "generalized cycle index of H" とは、次式で与えられる：

$$\text{Cyc}(H, \chi) = \frac{1}{|H|} \sum_{w \in H} \chi(w^{-1}) \prod_i x_i^{c_i(w)}$$

Stanley [24] では、この一般化された cycle index を用いて、unimodal sequences の新しいクラスを述べている。

References

1. P. M. Neumann, A lemma that is not Burnside's, Math. Scientist 4 (1979), 133-141.
2. G. Pólya, Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, Acta Math. 68 (1937), 145-253.
3. J. H. Redfield, The theory of group-reduced distributions, Amer. J. Math. 49 (1927), 433-455.
4. N. G. de Bruijn, Recent developments in enumeration theory, Proc. Internat. Congress Math. (Nice 1970) 3 (1971), 193-199.
5. H. Narushima, A survey of enumerative combinatorial theory and a problem, Proc. Fac. Sci. Tokai Univ. 14 (1979), 1-10.
6. C. L. Liu 著 伊理正夫、伊理由美訳 "組合せ数学入門 I", 共立出版 (1972).
7. C. Berge 著 野崎昭弘訳 "組合せ論の基礎", サイエンス社 (1973).
8. L. Lovász 著 成嶋 弘、土屋守正訳 "数の上昇"の技法", 東海大学出版会 (1988).

9. G.-C. Rota and D.A. Smith, Enumeration under group action, *Annali Scuola Normale Superiore - Pisa Classe di Scienze* (4), 4 (1977), 637-646.
10. G.-C. Rota and B. Sagan, Congruences derived from group action, *Europ. J. Combinatorics* 1 (1980), 67-76.
11. E. W. Witt, Treue Darstellung Liescher Ringe, *J. für die Reine und Ang. 177* (1937), 152-160.
12. G.-C. Rota, Baxter algebras and combinatorial identities II, *Bull. Amer. Math. Soc.* 75 (1969), 330-334.
13. 有木 進、中邨博之、中村博昭, 半順序集合と表現次数, 数解研講究録 641 "組合せ論とその周辺の研究" (1988年1月), 230-244.
14. H. Narushima, An algorithmic role of the face-posets of polyhedral complexes, in S. Suzuki (ed.), "Topology and Computer Science", Kinokuniya (1987), 521-533.
15. 成嶋 弘、数之上げ組合せ論 - 鎖多項式を中心にして -, 数解研講究録 641 "組合せ論とその周辺の研究" (1988年1月), 1-20.

16. H. Narushima, A class of recurrence relations on acyclic digraphs of poset type, in RIMS Kokyuroku 427 (1981) "Applied Combinatorial Theory and Algorithms", 55-67.
17. I. G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall polynomials, Clarendon Press (1979).
18. R. P. Stanley, Generating functions, in G.-C. Rota (ed.), "Studies in Combinatorics", M. A. A. (1978), 100-141.
19. P. Doubilet, G.-C. Rota and R. P. Stanley, On the foundations of combinatorial theory VI: The idea of generating function, Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol 2 (1972), or in G.-C. Rota (ed.), "Finite Operator Calculus", Academic Press (1975), 83-134.
20. P. Doubilet, On the foundations of combinatorial theory VII: Symmetric functions through the theory of distribution and occupancy, Studies in Applied Math., 51 (1972), 377-396.
21. A. Joyal, Une théorie combinatoire des séries formelles, Advan. in Math. 42 (1981), 1-82.

22. F. Bonetti, G.-C. Rota, D. Senato and A.M. Venezia,
Symmetric functions and symmetric species,
Annals of Discrete Math. 30(1986), 107-114.
23. O. Nava and G.-C. Rota, Plethysm, Categories,
and Combinatorics, Advan. in Math. 58(1985), 61-88.
24. R.P. Stanley, Unimodality and Lie superalgebras,
Studies in Applied Math. 72(1985), 263-281.
25. R.P. Stanley, Enumerative Combinatorics I,
Wadsworth (1986).
- 26.⁺ E.M. Wright, Burnside's lemma: A historical
note, J. Combinatorial Theory B, 30(1981), 89-90.
- 27.⁺ J. Sheehan, Redfield discovered again, in E. K.
Lloyd (ed.), "Surveys in Combinatorics", Cambridge
Univ. Press (1983), 135-155.
- 28.⁺ D. Foata, A combinatorial proof of the Mehler formula
J. Combinatorial Theory A, 24(1978), 367-376.
- 29.⁺ 岩堀 長慶 "対称群と一般線型群の表現論", 岩波書店(1982).
- 30.⁺ R.P. Stanley, Differential posets, preprint.
- 31.⁻ G. James and A. Kerber, The Representation
Theory of the Symmetric Group, Addison-Wesley
(1981).